

Новая схема интегрирования уравнений движения частиц в методе “частиц-в-ячейках” для задач физики плазмы

К. В. Вшивков*, Е. С. Воропаева, А. А. Ефимова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

*Контактный автор: Вшивков Константин Витальевич, e-mail: kovsh@ssd.ssc.ru

Поступила 04 августа 2022 г., доработана 08 сентября 2022 г., принята в печать 10 октября 2022 г.

Представлен новый метод решения релятивистских уравнений движения заряженных частиц в электромагнитных полях, учитывающий условие постоянства их значений на каждом временном шаге. Проведено сравнение точности и эффективности вычислений при решении тестовых задач в дву- и трехмерной постановках на основе нового метода, метода Бориса и его модификаций. В каждом случае рассматривались варианты аналитически и дискретно заданных значений электрического и магнитного полей.

Ключевые слова: численные методы, метод “частиц-в-ячейках”, метод Бориса, релятивистские уравнения движения заряженных частиц.

Цитирование: Вшивков К.В., Воропаева Е.С., Ефимова А.А. Новая схема интегрирования уравнений движения частиц в методе “частиц-в-ячейках” для задач физики плазмы. Вычислительные технологии. 2023; 28(2):27–41. DOI:10.25743/ICT.2023.282.004.

Введение

Для численного решения задач динамики заряженных частиц в электромагнитных полях наиболее часто применяется метод Бориса [1]. Свойства метода и его наиболее известных и широко используемых модификаций подробно описаны в литературе. Метод относится к схемам типа “чехарда”, обладает вторым порядком точности и достаточно экономичен [1–3]. Устойчивость метода Бориса и свойство сохранения энергии с точки зрения методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений движения частиц в магнитном поле теоретически доказаны относительно недавно [4]. Новые модификации метода Бориса позволяют упростить, уточнить либо ускорить вычисления. Например, обладающие той же точностью, что и метод Бориса, трехступенчатый интегратор и интегратор из n шагов рассмотрены в [5, 6]. В работе [7] предложен алгоритм, основанный на использовании двухшаговой процедуры метода Бориса n раз. За счет уменьшения временного шага такой алгоритм имеет более высокую точность. Модификация, основанная на аналитическом решении уравнений движения, позволяет точно определить поворот частицы под действием магнитного поля [8].

В работе [9] исследуются методы высоких (третьего и четвертого) порядков, допускающие использование большего шага по времени для решения релятивистских уравнений

движения, которые становятся нелинейными из-за наличия фактора Лоренца. Сохраняющие энергию неявные методы для решения релятивистских задач, в том числе метод, основанный на аппроксимации направляющего центра, рассматриваются в статье [10]. Обзоры других схем решения уравнений движения представлены в ряде последних работ по методу “частиц-в-ячейках” [11–14].

Однако, несмотря на большое количество публикаций, в которых рассматриваются алгоритмы расчета траекторий движения заряженных частиц, существует потребность в создании новых, более точных и высокопроизводительных алгоритмов для решения широкого круга задач в области астрофизики, физики плазмы и управляемого термоядерного синтеза [15–18].

В настоящей работе представлен новый метод решения релятивистских уравнений движения заряженных частиц, учитывающий условие постоянства значений электромагнитных полей на каждом временном шаге. Подобный алгоритм рассмотрен О. Бунеманом в работах [19, 20] для случая нерелятивистского движения частиц с использованием существенно увеличивающих время решения задачи тригонометрических функций. Проведено сравнение точности и эффективности вычислений траекторий частиц для созданной новой схемы, метода Бориса [1] и некоторых его модификаций [21, 22] на примере решения тестовых задач в дву- и трехмерной постановках. В каждом случае рассматривались варианты аналитически и дискретно заданных электрического и магнитного полей.

В первом разделе дан краткий обзор существующих схем решения уравнений движения заряженных частиц в методе “частиц-в-ячейках”. Во втором разделе описаны рассматриваемые в работе схемы, в третьем — исследована аппроксимация схем в нерелятивистском случае. Сравнительные тесты для всех рассмотренных схем приведены в четвертом разделе.

1. Схемы решения уравнений движения в методе частиц-в-ячейках

Движение частицы с массой m и зарядом q в электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{B} полях описывается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{p}(t) = m\gamma\mathbf{v}(t)$ — координаты, скорость и импульс частицы соответственно; c — скорость света. Релятивистский фактор определяется формулой $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} = \sqrt{1 + (p/mc)^2}$. Электрическое и магнитное поля зависят от времени и координат частицы: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r}(t))$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \mathbf{r}(t))$. Далее будем рассматривать уравнения (1) в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\mathbf{p}(t) = \gamma\mathbf{v}(t), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \sqrt{1 + p^2}. \quad (3)$$

В качестве характерных величин для нормировки выбраны скорость света c , время t_0 , пространственный размер $L = ct_0$, электрическое и магнитное поля $E_0 = B_0 = mc/(qt_0)$. В безразмерных переменных заряд частицы, масса частицы и скорость света равны единице.

Метод решения уравнений (2) должен удовлетворять трем основным критериям: иметь достаточно высокую точность, простоту формул и высокую скорость вычислений [1]. Эти требования, в первую очередь, связаны с необходимостью использования большого количества модельных частиц для достижения приемлемой точности решения. Кроме того, для возможности расчета задачи на достаточно большом временном интервале необходимо добавить обратимость во времени, сохранение энергии и фазового объема [4].

Для решения уравнений (2) наиболее часто используется явный метод “чехарды”:

$$\frac{\mathbf{p}^{n+1/2} - \mathbf{p}^{n-1/2}}{\tau} = \mathbf{F}(\mathbf{p}^{n-1/2}, \mathbf{p}^{n+1/2}, \mathbf{E}^n, \mathbf{B}^n), \quad (4)$$

$$\frac{\mathbf{r}^{n+1} - \mathbf{r}^n}{\tau} = \mathbf{v}^{n+1/2}. \quad (5)$$

Скорость частицы определяется по импульсу частицы с помощью формулы (3). Все используемые методы решения уравнений движения различаются только способом вычисления нового импульса, т. е. видом функции $\mathbf{F}(\mathbf{p}^{n-1/2}, \mathbf{p}^{n+1/2}, \mathbf{E}(\mathbf{r}^n), \mathbf{B}(\mathbf{r}^n))$. Для того чтобы метод имел второй порядок точности и был обратим по времени, необходимо формулу (4) центрировать по времени. В дальнейшем при описании схем будем рассматривать только способы реализации формулы (4), считая, что координаты частицы вычисляются по формуле (5). Рассмотрим подробно несколько методов решения уравнений движения заряженных частиц в электромагнитном поле: метод Бориса [1], метод Вэя [21], метод Хигуэра – Кэри [22] и созданный новый метод VD1.

1.1. Схема Бориса 1

Эффективная схема вычисления импульса, предложенная Борисом [1], в течение 50 лет была основной для расчета движения частиц. Схема имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}^{n-1/2}}{\tau/2} = \mathbf{E}, \\ \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{2} = \frac{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1}{2} \times \mathbf{B}, \\ \frac{\mathbf{p}^{n+1/2} - \mathbf{p}_2}{\tau/2} = \mathbf{E}. \end{cases} \quad (6)$$

Как следует из формул (6), процесс вычисления новой скорости имеет три этапа. Сначала происходит изменение скорости только под действием электрического поля. На втором этапе частица вращается в магнитном поле, т. е. происходит поворот вектора импульса частицы без изменения его величины ($|p_2| = |p_1|$). Значение релятивистского фактора на втором этапе не меняется, поэтому линейные уравнения этого этапа легко решаются аналитически.

Для решения второго уравнения системы (6) используются формулы

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1 \times \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \frac{2}{1 + \theta^2} \mathbf{p}' \times \boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\theta} = \left(\frac{\tau}{2\gamma} \right) \mathbf{B}.$$

Релятивистский фактор $\gamma = \sqrt{1 + p_1^2}$ определяется по значению \mathbf{p}_1 , найденному по первой формуле системы (6). На третьем этапе происходит изменение скорости только под действием электрического поля по третьей формуле системы (6).

Схема (6) имеет второй порядок аппроксимации по τ и обратима по времени. Недостатком этой схемы является наличие небольшой ошибки в определении угла поворота вектора скорости.

1.2. Схема Бориса 2

В статье [1] предложена модификация вышеуказанной схемы, которая точно поворачивает вектор скорости, используя при этом для нахождения вектора $\boldsymbol{\theta}$ тригонометрические функции:

$$\boldsymbol{\theta} = \tan\left(\frac{\tau B}{2\gamma}\right) \mathbf{b},$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{V}/B$ — единичный вектор в направлении магнитного поля. В работе [8] для второй схемы Бориса предложен двухступенчатый алгоритм, основанный на аналитическом решении второго уравнения системы (6). Сначала в векторе \mathbf{p}_1 выделяется часть, параллельная вектору \mathbf{V} :

$$\mathbf{p}_{1,\parallel} = (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}, \quad (7)$$

затем вычисляется вектор

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{1,\parallel} + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_{1,\parallel}) \cos \theta + (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{b}) \sin \theta, \quad \theta = \frac{\tau B}{\gamma}. \quad (8)$$

Кроме вышеупомянутых классических методов рассмотрим методы, приведенные в работах Вэя [21] и Хигуэра – Кэри [22], которые, как утверждают авторы, можно использовать при больших значениях релятивистского фактора ($\gamma \gg 1$).

1.3. Схема Вэя

Для уменьшения ошибки в определении ускорения частиц перпендикулярными электрическими полями Вэй [21] предложил модификацию алгоритма Бориса, определив среднюю скорость как

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{p}^{n-1/2}}{\gamma^{n-1/2}} + \frac{\mathbf{p}^{n+1/2}}{\gamma^{n+1/2}} \right).$$

Первое уравнение системы (2) решается в два этапа. Сначала по явной схеме вычисляется вклад электрического поля (за шаг по времени) и магнитного поля (за половину шага по времени):

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}^{n-1/2} + \tau \mathbf{E}^n + \frac{\tau}{2} \frac{\mathbf{p}^{n-1/2}}{\gamma^{n-1/2}} \times \mathbf{V}^n.$$

За вторую половину шага по времени выполняется шаг вращения

$$\mathbf{p}^{n+1/2} = s [\mathbf{p}' + (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} + \mathbf{p}' \times \boldsymbol{\theta}],$$

где $\mathbf{p}^{n+1/2}$ вычисляется через $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\mu}/\gamma^{n+1/2}$. Вспомогательные величины определяются выражениями

$$s = 1/(1 + \theta^2), \quad \boldsymbol{\mu} = \mathbf{V}^n \tau/2, \quad \sigma = (\gamma')^2 - \mu^2, \quad p^* = (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\mu}), \quad \gamma' = \sqrt{1 + (p')^2},$$

$$\gamma^{n+1/2} = \sqrt{\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4(\mu^2 + (p^*)^2)}}{2}}.$$

Вычисление координат частиц выполняется так же, как в схеме Бориса.

1.4. Схема Хигуэра – Кэри

Хотя все рассмотренные методы имеют погрешность второго порядка по времени, они различаются членами, значения которых увеличиваются с ростом релятивистского параметра. В работе [22] показано, что метод Вэя приводит к появлению ошибки при вычислении энергии вблизи резонансных орбит, которая отсутствует в остальных рассмотренных схемах, сохраняющих объем. Схема Хигуэра – Кэри, в отличие от схемы Вэя, основывается на другом выборе средней скорости:

$$\bar{v} = \frac{\mathbf{p}^{n+1/2} + \mathbf{p}^{n-1/2}}{2\bar{\gamma}}, \quad \text{где} \quad \bar{\gamma} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathbf{p}^{n+1/2} + \mathbf{p}^{n-1/2}}{2} \right)^2}.$$

Вычисление импульса выполняется в три этапа. Сначала вычисляется ускорение в электрическом поле за половину шага по времени:

$$\mathbf{p}^- = \mathbf{p}^{n-1/2} + \frac{\tau}{2} \mathbf{E}^n.$$

Затем выполняется шаг вращения в магнитном поле:

$$\mathbf{p}^+ = s [\mathbf{p}^- + (\mathbf{p}^- \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} + \mathbf{p}^- \times \boldsymbol{\theta}].$$

На третьем этапе добавляется ускорение за вторую половину шага по времени за счет электрического поля:

$$\mathbf{p}^{n+1/2} = \mathbf{p}^+ + \frac{\tau}{2} \mathbf{E}^n + \mathbf{p}^+ \times \boldsymbol{\theta}.$$

Вспомогательные величины определяются аналогично выражениям для схемы Вэя:

$$s = \frac{1}{1 + \theta^2}, \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{\gamma^+}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{B}^n \tau}{2}, \quad \gamma^- = \sqrt{1 + (p^-)^2},$$

$$\sigma = (\gamma^-)^2 - \mu^2, \quad p^* = (\mathbf{p}^- \cdot \boldsymbol{\mu}), \quad \gamma^+ = \sqrt{\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4(\mu^2 + (p^*)^2)}}{2}}.$$

1.5. Новая схема VD1

Нами разработана новая схема расчета траекторий движения заряженных частиц, основанная на аналитическом решении уравнения для импульса. При этом учитывается, что на каждом шаге по времени электрическое и магнитное поля остаются постоянными, а значение релятивистского фактора определяется в ходе решения. Изменение импульса вдоль магнитного поля происходит только за счет электрического поля, а поперек магнитного поля осуществляются дрейфовое движение в скрещенных полях и вращение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Схема состоит из нескольких этапов. Сначала вычисляются продольные компоненты импульса и электрического поля:

$$\mathbf{p}_{\parallel}^{n-1/2} = (\mathbf{p}^{n-1/2} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}, \quad \mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b},$$

где \mathbf{b} — единичный вектор в направлении магнитного поля, $\mathbf{b} = \mathbf{V}/V$. Продольный импульс за шаг по времени находится по формуле

$$\mathbf{p}_{\parallel}^{n+1/2} = \mathbf{p}_{\parallel}^{n-1/2} + \mathbf{E}_{\parallel} \tau.$$

Далее рассчитываются поперечные компоненты импульса и электрического поля:

$$\mathbf{p}_\perp^{n-1/2} = \mathbf{p}^{n-1/2} - \mathbf{p}_\parallel^{n-1/2}, \quad \mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} - \mathbf{E}_\parallel.$$

Значение импульса на новом временном шаге будет иметь вид

$$\mathbf{p}^{n+1/2} = \mathbf{p}_\parallel^{n+1/2} + \mathbf{E}' \times \mathbf{b} + \left(\mathbf{p}_\perp^{n-1/2} - \mathbf{E}' \times \mathbf{b} \right) \cos \theta + \left(\mathbf{E}' + \mathbf{p}_\perp^{n-1/2} \times \mathbf{b} \right) \sin \theta,$$

где $\mathbf{E}' \equiv \gamma^* \mathbf{E}_\perp / B$, $\theta = \tau B / \gamma^*$. Для вычисления γ^* сначала определяется импульс p^* , по которому находится релятивистский фактор:

$$p^* = |\mathbf{p}^{n-1/2}| + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\mathbf{p}^{n-1/2}}{|\mathbf{p}^{n-1/2}|} \cdot \mathbf{E} \right), \quad \gamma^* = \sqrt{1 + (p^*)^2}.$$

2. Анализ рассмотренных схем в нерелятивистском случае

Проведем анализ характеристик схем. Оценим их точность, аппроксимацию и время счета. Все схемы применимы для расчета нерелятивистского движения частиц в электромагнитных полях. В этом случае учитывается условие $\gamma = 1$ и во всех схемах используется скорость, а не импульс. Рассмотрим нерелятивистские аналоги схем, описанных в предыдущем разделе, предположив, что ось Z направлена вдоль магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$, а электрическое поле и скорость частицы имеют все три компоненты $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ и $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Первая схема Бориса является аналогом схемы (6) и имеет вид

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1/2} - \mathbf{v}^{n-1/2}}{\tau} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}^{n+1/2} + \mathbf{v}^{n-1/2}}{2} \times \mathbf{B},$$

или покомпонентно

$$\begin{cases} \frac{v_x^{n+1/2} - v_x^{n-1/2}}{\tau} = E_x + \frac{v_y^{n+1/2} + v_y^{n-1/2}}{2} B_z, \\ \frac{v_y^{n+1/2} - v_y^{n-1/2}}{\tau} = E_y + \frac{v_x^{n+1/2} + v_x^{n-1/2}}{2} B_z, \\ \frac{v_z^{n+1/2} - v_z^{n-1/2}}{\tau} = E_z. \end{cases}$$

Новые координаты частицы определяются по формуле (5).

Вторая схема Бориса является аналогом схемы (7), (8):

$$\frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}^{n-1/2}}{\tau/2} = \mathbf{E}, \quad (9)$$

$$\mathbf{v}_{1,\parallel} = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}, \quad (10)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{1,\parallel} + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1,\parallel}) \cos \theta + (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{b}) \sin \theta, \quad (11)$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1/2} - \mathbf{v}_2}{\tau/2} = \mathbf{E}, \quad (12)$$

где $\theta = \tau B_z / 2$, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$. Покомпонентные выражения для формул (9) и (12) выглядят тривиально, а формулы (10) и (11) принимают вид

$$\begin{cases} v_{2,x} = v_{1,x} \cos \theta + v_{1,y} \sin \theta, \\ v_{2,y} = v_{1,y} \cos \theta - v_{1,x} \sin \theta, \\ v_{2,z} = v_{1,z}. \end{cases}$$

Схема Вэя состоит из двух этапов. Первый этап связан с изменением скорости на шаге по времени за счет электрического поля и на половине шага за счет магнитного поля:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{n-1/2} + \tau \mathbf{E} + \mathbf{v}^{n-1/2} \times \boldsymbol{\theta}.$$

На втором этапе изменение скорости обусловлено вращением частицы в магнитном поле:

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = s [\mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} + \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\theta}],$$

где $\boldsymbol{\theta} = \tau \mathbf{B}/2$, $s = 1/(1 + \theta^2)$.

Схема Хигуэра – Кэри. В ней, как и в схеме Бориса, сначала вычисляется изменение скорости за счет электрического поля за половину шага по времени:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}^{n-1/2} + \frac{\tau}{2} \mathbf{E}.$$

Затем делается шаг вращения в магнитном поле:

$$\mathbf{v}_2 = s [\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} + \mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\theta}].$$

На последнем этапе добавляется вторая половина ускорения за счет электрического поля:

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}_2 + \frac{\tau}{2} \mathbf{E} + \mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\theta}.$$

Значения $\boldsymbol{\theta}$ и s вычисляются так же, как в схеме Вэя.

Новая схема VD1. Рассмотрим покомпонентную систему уравнений нерелятивистского движения частицы:

$$\frac{dv_x}{dt} = E_x + v_y B_z, \quad (13)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = E_y - v_x B_z, \quad (14)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = E_z. \quad (15)$$

Поскольку на шаге по времени электрическое и магнитное поля остаются постоянными, уравнения (13)–(15) решаются аналитически и значения скоростей частиц определяются следующим образом [23]:

$$\begin{cases} v_x(t) = S_y + (v_x(0) - S_y) \cos \theta + (v_y(0) + S_x) \sin \theta, \\ v_y(t) = -S_x + (v_y(0) + S_x) \cos \theta - (v_x(0) - S_y) \sin \theta, \\ v_z(t) = t E_z + v_z(0), \end{cases}$$

где $S_x = E_x/B_z$, $S_y = E_y/B_z$, $\theta = t B_z$. Для нахождения новых координат частицы используется формула (5).

Для решения уравнений (13)–(15) при наличии релятивистского фактора, который зависит от скорости, получить аналитические формулы невозможно, даже при наличии постоянных полей.

3. Оценка погрешности решения задачи движения частиц

3.1. Нерелятивистский случай

Рассмотрим погрешности аппроксимаций приведенных выше нерелятивистских схем, которые были найдены аналитически для полей $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$. Полученные результаты для каждого уравнения системы (13)–(15) представлены в табл. 1. Видно, что все рассмотренные схемы имеют второй порядок аппроксимации. Для второй схемы Бориса аппроксимация зависит от величины магнитного поля и поперечных электрических полей, в то время как для остальных схем аппроксимация зависит еще и от поперечных скоростей частицы.

3.2. Релятивистский случай

В релятивистском случае аналитический анализ погрешности аппроксимаций вызывает большие трудности. Поэтому мы ограничимся оценкой погрешности на примере решения тестовой задачи движения заряженной частицы в скрещенных полях: $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$, $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$. Здесь ускорения вдоль направления Z не происходит и, если начальная скорость частицы лежит в плоскости XY , то траектория частицы лежит в этой же плоскости.

Рассмотрим движение для значений $B_z = 1$ и $E_x = 0.1$, скорость дрейфа $v_{др} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2 = (0, -E_x/B_z, 0) = (0, -0.1, 0)$. Предположим, что в момент времени $t = 0$ частица находится в начале координат $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$ и имеет нулевую скорость $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$. С течением времени частица будет совершать дрейфовое движение в скрещенных полях и вращение вокруг движущегося центра. Траектория движения частицы, которая имеет вид циклоиды, представлена на рис. 1, а. Для наглядности здесь приведена только часть траектории, соответствующая времени $0 < t < 40$ ($-4 < y < 0$); для моментов времени $t > 40$ траектория имеет аналогичный вид. Расчет по схеме VD1 проведен до момента времени $t = 3000$. За это время в системе координат, движущейся со скоростью дрейфа, частица совершала вращения по окружности, ларморовский радиус которой $R = 0.1$ (рис. 1, б).

Исследование погрешности каждого метода решения рассмотренной задачи проводилось с использованием правила Рунге на последовательности сеток временного шага $\tau = \left\{ \frac{1}{100 \cdot 2^n} \mid n = 1, \dots, 5 \right\}$ в норме, являющейся сеточным аналогом нормы пространства непрерывных функций. Формула нормы для оценки погрешности имеет вид

$$\| \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_\tau(t) \| \leq C_\tau \tau^2,$$

Т а б л и ц а 1. Погрешность аппроксимаций

Table 1. Approximation error

Уравнение	Первая схема Бориса	Вторая схема Бориса	Схема Вэя	Схема Хигуэра – Кэри	Новая схема
(13)	$\frac{\tau^2}{12} B_z^2 (E_x + v_y B_z)$	$\frac{\tau^2}{12} E_x B_z^2$	$\frac{\tau^2}{12} B_z^2 (E_x + v_y B_z)$	$\frac{\tau^2}{12} B_z^2 (E_x + v_y B_z)$	0
(14)	$\frac{\tau^2}{12} B_z^2 (E_y - v_x B_z)$	$\frac{\tau^2}{12} E_y B_z^2$	$\frac{\tau^2}{12} B_z^2 (E_y - v_x B_z)$	$\frac{\tau^2}{12} B_z^2 (E_y - v_x B_z)$	0
(15)	0	0	0	0	0

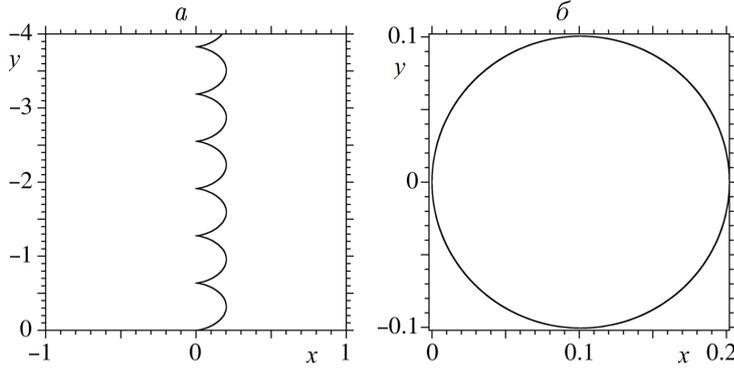


Рис. 1. Траектория частицы в неподвижной системе координат (а) и в системе координат, движущейся со скоростью дрейфа (б)

Fig. 1. Particle trajectory in a fixed coordinate system (a) and in a coordinate system moving with drift velocity (b)

Т а б л и ц а 2. Погрешности методов
Table 2. Method errors

Схема	C_τ
Первая схема Бориса	178.3
Вторая схема Бориса	172.2
Схема Вэя	171.7
Схема Хигуэра – Кэри	171.4
Новая схема VD1	1.487

где $\mathbf{r}_\tau(t)$ — решение, полученное по разностной схеме; $\mathbf{r}(t)$ — точное решение; C_τ — коэффициент, зависящий от используемой схемы. Значения полученных погрешностей представлены в табл. 2.

Результаты расчетов показали, что все рассмотренные схемы также имеют второй порядок аппроксимации. Поскольку новая схема основана на точном решении уравнений для скорости, при малых значениях релятивистского фактора ее свойства приближаются к свойствам схемы в нерелятивистском случае. В приведенном примере максимальное значение релятивистского фактора равно 1.02. Из табл. 2 видно, что погрешность новой схемы меньше по сравнению с остальными схемами более чем в 100 раз.

3.3. Оценка погрешности решения задачи при больших значениях релятивистского фактора

При больших значениях релятивистского фактора свойства всех рассмотренных схем ухудшаются, хотя второй порядок сходимости сохраняется. Покажем это на примере решения тестовой задачи, приведенной в работе [10]. Рассмотрим движение частицы в электромагнитном поле $\mathbf{E} = (0.995, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$, когда значение коэффициента

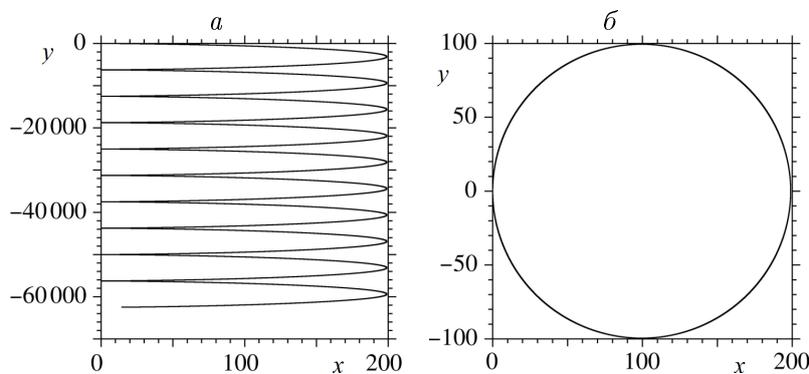


Рис. 2. Траектория частицы в неподвижной системе координат (а) и в системе координат, движущейся со скоростью дрейфа (б) при больших значениях γ

Fig. 2. Particle trajectory in a fixed coordinate system (a) and in a coordinate system moving with drift velocity (b) for high values of γ

Т а б л и ц а 3. Погрешности методов
Table 3. Method errors

Схема	C_τ
Первая схема Бориса	$2.672 \cdot 10^4$
Вторая схема Бориса	$1.334 \cdot 10^4$
Схема Взя	$1.324 \cdot 10^4$
Схема Хигуэра – Кэри	$6.510 \cdot 10^3$
Новая схема VDI	$1.003 \cdot 10^3$

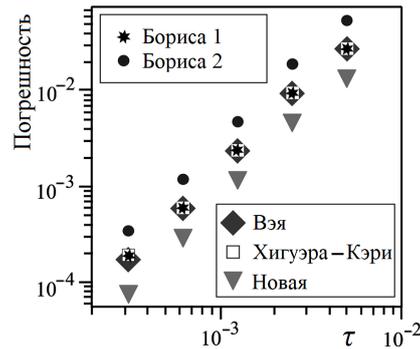


Рис. 3. Поведение погрешности в логарифмической шкале для рассмотренных методов
Fig. 3. Behavior of the error in the logarithmic scale for the considered methods

Лоренца для дрейфовой скорости вычисляется по формуле $\gamma_{др} = 1/\sqrt{1 - v_{др}^2} = 10$. Как и в статье [10], расчет проводился до $t = 2\pi \cdot 10^4$, $\tau = 0.0005$.

Траектория частицы в неподвижной системе координат представлена на рис. 2, а, а в подвижной — на рис. 2, б. Видно, что они качественно соответствуют рис. 1, где представлены траектории для релятивистского случая с небольшим значением γ . В данном случае за время расчета частица совершала вращение по окружности с радиусом $R = 100$. Полученные результаты расчета погрешности всех рассмотренных выше схем представлены в табл. 3., из которой следует, что новая схема точнее других схем не менее чем в 6 раз. Это объясняется тем, что она основана на точном решении уравнений движения. В расчетах значение релятивистского фактора менялось от 1 до 199, при этом замечено, что точность вычислений падает с ростом γ .

На рис. 3 представлено значение погрешности для каждого метода с использованием двойной логарифмической шкалы. Из рисунка видно, что для всех рассмотренных схем погрешность убывает как τ^2 , новая схема дает наименьшую погрешность. Практически одинаковые погрешности имеют схемы Взя и Хигуэра – Кэри.

4. Сравнение времени счета

Одним из важных критериев выбора схемы численного решения любой задачи является время работы используемой вычислительной системы. Широко используемая схема Бориса 1 долгое время была вне конкуренции: в ней удачно сочетались второй порядок аппроксимации, устойчивость и явная реализация.

Сравнение времени расчета траекторий движения частиц в электромагнитном поле выполнено для 10^5 шагов по времени для разных методов решения уравнения движения частиц. Полученные результаты расчетов представлены на рис. 4. Из рисунка видно, что время работы новой схемы более чем в три раза превосходит время работы по схеме Бориса. Заметим, что использование в новой схеме тригонометрических функций увеличивает время расчета, но этот недостаток полностью компенсируется высокой точностью новой схемы и возможностью увеличить шаг по времени.

4.1. Движение частицы в неоднородном магнитном поле

При решении задач физики плазмы, как правило, необходимо исследовать динамику движения частиц в неоднородных электромагнитных полях на больших временных

интервалах. Например, при исследовании удержания плазмы в открытых магнитных системах следует учитывать время многократных баунс-колебаний (bounce-oscillations) частиц в поле пробкотрона, которое существенно превышает времена ларморовского вращения и дрейфа [16]. Как показано в работе [4], некоторые численные методы из-за наличия диссипативных эффектов не позволяют точно вычислять траекторию и энергию на больших промежутках времени.

Для оценки точности новой схемы рассмотрим тестовую задачу движения частицы в неоднородном электромагнитном поле, аналогичную использованной в работе [7]. Движение частицы из точки $\mathbf{r}_0 = (0.9, 0, 0)$ с начальной скоростью $\mathbf{v}_0 = (0.1, 0, 0)$ происходит в электромагнитном поле

$$\mathbf{B} = (x^2 + y^2)^{1/2} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{E} = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, 0 \right).$$

Результаты численного решения этой задачи, полученные на основе новой схемы, представлены на рис. 5. Приведенная на рис. 5,а траектория движения частицы соответствует временному интервалу $0 < t < 10\,000$, что составляет 13 оборотов частицы по внешней окружности с радиусом $R = 0.91$. Форма траектории определяется ларморовским вращением в магнитном поле и дрейфом в скрещенных полях. Дрейф частицы происходит в плоскости $z = 0$ перпендикулярно электрическому полю.

Особенность движения частицы — периодические колебания ее кинетической энергии, амплитуда и период которых должны оставаться постоянными. Временная зависимость нормированной кинетической энергии, вычисленная на основе новой схемы с шагом $\tau = 0.025$, представлена на рис. 5,б для отрезка времени $0 < t < 25$, который составляет небольшую часть полного времени расчета траектории $t = 10^4$. График наглядно демонстрирует сохранение амплитуды и периода колебаний кинетической энергии частицы при ее движении в заданном неоднородном электромагнитном поле. Один период колебаний кинетической энергии соответствует продвижению частицы по одной окружности ларморовского радиуса. Расчет по новой схеме показал, что поведение энергии не меняется при вычислении на большом временном интервале, соответствующем 400 000 шагам по времени, что позволяет говорить о высокой точности созданной схемы.

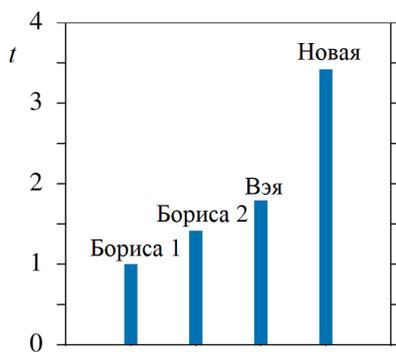


Рис. 4. Время расчетов для различных методов решения уравнений движения заряженных частиц

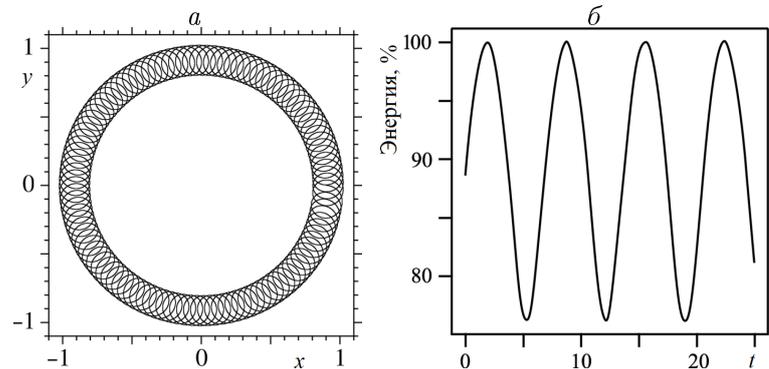


Рис. 5. Траектория движения частицы (а) и изменение энергии по времени на интервале $[0, 25]$ (б)

Fig. 5. Particle trajectory (а) and energy versus time on the interval $[0, 25]$ (б)

Calculation time for various methods for solving the equations of charged particles motion

Заключение

Представлен подробный анализ некоторых явных методов решения задачи движения заряженных частиц в электромагнитных полях, которые различаются способом задания средних значений скоростей. Предложена новая схема, основанная на аналитическом решении. Для схем Бориса, Вэя, Хигуэра–Кэри и новой схемы VD1 проведен сравнительный анализ точности, сходимости и времени счета для релятивистского и нерелятивистского случаев. В нерелятивистском случае новая схема позволяет точно решить уравнения движения заряженных частиц, а в релятивистском случае точность новой схемы остается более высокой по сравнению с другими схемами. С ростом релятивистского фактора происходит падение точности всех рассмотренных схем расчета траекторий движения частиц в электромагнитном поле. При больших значениях релятивистского параметра новая схема по точности лучше остальных схем и сохраняет второй порядок. В практических расчетах, когда частицы могут иметь различные скорости, схема автоматически подстраивается под заданную скорость частицы. Представленная новая схема расчета траекторий может иметь важное значение при решении широкого круга задач астрофизики и термоядерного синтеза, где требуется высокая точность определения траекторий движения частиц в неоднородных полях для больших моментов времени.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (№ 0251-2021-0005).

Авторы статьи выражают глубокую признательность и огромную благодарность сотрудникам лаборатории суперкомпьютерного моделирования ИВМиМГ СО РАН Г.И. Дудниковой и В.А. Вшивкову за помощь при написании и редактировании рукописи.

Список литературы

- [1] **Boris J.P.** Relativistic plasma simulation — optimization of a hybrid code. Proceedings of 4th Conference on Numerical Simulation of Plasmas. Washington; 1970: 3–67.
- [2] **Березин Ю.А., Вшивков В.А.** Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука; 1980: 90.
- [3] **Бэдсел Ч., Ленгдон А.** Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат; 1989: 452.
- [4] **Qin H., Zhang S., Xiao J., Liu J., Sun Y., Tang W.** Why is Boris algorithm so good? Physics of Plasmas. 2013; 20(8):084503. DOI:10.1063/1.4818428. Available at: https://www.researchgate.net/publication/258081219_Why_is_Boris_algorithm_so_good.
- [5] **Umeda T.** A three-step Boris integrator for Lorentz force equation of charged particles. Computer Physics Communications. 2018; (228):1–4. DOI:10.1016/j.cpc.2018.03.019.
- [6] **Umeda T.** Multi-step Boris rotation schemes for Lorentz force equation of charged particles. Computer Physics Communications. 2019; (237):37–41. DOI:10.1016/j.cpc.2018.11.001.
- [7] **Zenitani S., Kato T.N.** Multiple Boris integrators for particle-in-cell simulation. Computer Physics Communications. 2019; (247):106954. DOI:10.1016/j.cpc.2019.106954.
- [8] **Zenitani S., Umeda T.** On the Boris solver in particle-in-cell simulation. Physics of Plasmas. 2018; 25(11):112110. DOI:10.1063/1.5051077.

-
- [9] **Qiang J.** High order numerical integrators for relativistic charged particle tracking. 2017; arXiv:1702.04486. DOI:10.48550/arXiv.1702.04486. Available at: <https://arxiv.org/abs/1702.04486v1>.
- [10] **Ripperda B., Vacchini F., Teunissen J., Xia C., Porth O., Sironi L., Lapenta G., Keppens R.** A comprehensive comparison of relativistic particle integrators. *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 2018; 235(21):20. DOI:10.3847/1538-4365/aab114. Available at: https://www.researchgate.net/publication/320619586_A_Comprehensive_Comparison_of_Relativistic_Particle_Integrators.
- [11] **Wolf E.M., Causley M., Christlieb A., Bettencourt M.** A particle-in-cell method for the simulation of plasmas based on an unconditionally stable field solver. *Journal of Computational Physics*. 2016; (326):342–372. DOI:10.1016/j.jcp.2016.08.006.
- [12] **Muñoz P.A., Jain N., Kilian P., Büchner J.** A new hybrid code (CHIEF) implementing the inertial electron fluid equation without approximation. *Computer Physics Communications*. 2018; (224):245–264. DOI:10.1016/j.cpc.2017.10.012.
- [13] **Derouillat J., Beck A., Pérez F., Vinci T., Chiaramello M., Grassi A., Flé M., Bouchard G., Plotnikov I., Aunai N., Dargent J., Riconda C., Grech M.** Smilei: a collaborative, open-source, multi-purpose particle-in-cell code for plasma simulation. *Computer Physics Communications*. 2018; (222):351–373. DOI:10.1016/j.cpc.2017.09.024.
- [14] **Jambunathan R., Levin D.A.** CHAOS: an octree-based PIC-DSMC code for modeling of electron kinetic properties in a plasma plume using MPI-CUDA parallelization. *Journal of Computational Physics*. 2018; (373):571–604. DOI:10.1016/j.jcp.2018.07.005.
- [15] **Березин Ю.А., Дудникова Г.И., Лисейкина Т.В., Федорук М.П.** Моделирование нестационарных плазменных процессов. Новосибирск: ИПЦ НГУ; 2018: 482. ISBN:978-5-4437-0721-1.
- [16] **Boronina M.A., Dudnikova G.I., Efimova A.A., Genrikh E.A., Vshivkov V.A., Chernoshtanov I.S.** Numerical study of diamagnetic regime in open magnetic trap. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020; 1640(1):012021. DOI:10.1088/1742-6596/1640/1/01.
- [17] **Efimova A.A., Dudnikova G.I.** Hybrid models of ion-acoustic shock waves formation on collisionless plasma. *AIP Conference Proceedings*. 2019; (2164):100002. DOI:10.1063/1.5130839. Available at: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5130839>.
- [18] **Xu R., Spitkovsky A., Caprioli D.** Electron acceleration in non-relativistic quasi-perpendicular collisionless shocks. *The Astrophysical Journal Letters*. 2020; 897L(41). Available at: <https://arxiv.org/pdf/1908.07890v1.pdf>.
- [19] **Yu S.P., Kooyers G.P., Buneman O.** Time-dependent computer analysis of electron-wave interaction in crossed fields. *Journal of Applied Physics*. 1965; 36(8):2550–2559. DOI:10.1063/1.1714528.
- [20] **Buneman O.** Time-reversible difference procedures. *Journal of Computational Physics*. 1967; 1(4):517–535. DOI:10.1016/0021-9991(67)90056-3.
- [21] **Vay J.L.** Simulation of beams or plasmas crossing at relativistic velocity. *Physics of Plasmas*. 2008; 15(5):056701. DOI:10.1063/1.2837054.
- [22] **Higuera A., Cary J.** Structure-preserving second-order integration of relativistic charged particle trajectories in electromagnetic fields. *Physics of Plasmas*. 2017; 24(5):052104. DOI:10.1063/1.4979989.
- [23] **Voropaeva E., Vshivkov K., Vshivkova L., Dudnikova G., Efimova A.** New motion algorithm in the particle-in-cell method. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021; 2028(1):012011. DOI:10.1088/1742-6596/2028/1/012011.
-

A new scheme for integrating the equations of particle motions in the “particle-in-cell” method for plasma physics

K. V. VSHIVKOV*, E. S. VOROPAeva, A. A. EFIMOVA

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

*Corresponding author: Vshivkov Konstantin V., e-mail: kovsh@ssd.sssc.ru

Received August 04, 2022, revised September 08, 2022, accepted October 10, 2022.

Abstract

At present, the Boris method is mostly common for the numerical solution of problems of the dynamics of charged particles in electromagnetic fields. In recent years, new modifications of the Boris method have appeared that are capable to simplify, refine, or speed up calculations. However, despite the rather large number of publications which consider algorithms for calculating the trajectories of charged particles, new, more accurate and high-performance algorithms are desired. The article presents a detailed analysis of some explicit methods for solving the problem of the motion of charged particles in electromagnetic fields, which differ in how they set the average values of velocities. A new scheme based on an analytical solution, which has not been studied before, is proposed. For the Boris, Vay, Higuera–Cary schemes and the new VD1 scheme, a comparative analysis of the accuracy, convergence and counting time for the relativistic and nonrelativistic cases is carried out. In the nonrelativistic case, the new scheme allows accurate solving of the equations for motion of charged particles, and in the relativistic case, the accuracy of the new scheme remains higher compared to other schemes. As the relativistic factor increases, the accuracy of all considered schemes for calculating the trajectory of particles in an electromagnetic field decreases. For large values of the relativistic parameter, the new scheme is more accurate than the other schemes and retains the second order. In practical calculations, when particles can have different speeds, the scheme automatically adjusts to the given speed of the particle. The presented new scheme for calculating trajectories can be important for solving a wide range of problems in astrophysics and thermonuclear fusion, where high accuracy in determining particle trajectories in inhomogeneous fields for large moments of time is required.

Keywords: numerical methods, particle-in-cell method, Boris method, relativistic equations of motion of charged particles.

Citation: Vshivkov K.V., Voropaeva E.S., Efimova A.A. A new scheme for integrating the equations of particle motions in the “particle-in-cell” method for plasma physics. Computational Technologies. 2023; 28(2):27–41. DOI:10.25743/ICT.2023.282.004. (In Russ.)

Acknowledgements. The work was carried out in the framework of the ICM&MG SB RAS project (No. 0251-2021-0005).

The authors of the article acknowledges chief researchers G.I. Dudnikova and V.A. Vshivkov for help in writing and editing the manuscript.

References

1. **Boris J.P.** Relativistic plasma simulation — optimization of a hybrid code. Proceedings of 4th Conference on Numerical Simulation of Plasmas. Washington; 1970: 3–67.
2. **Berezin Yu.A., Vshivkov V.A.** Metod chastits v dinamike razrezhennoy plazmy [Particle-in-cell method in rarefied plasma dynamics]. Novosibirsk: Nauka; 1980: 90. (In Russ.)

3. **Birdsall C.K., Langdon A.B.** Plasma physics via computer simulation. McGraw-Hill; 1985: 479.
4. **Qin H., Zhang S., Xiao J., Liu J., Sun Y., Tang W.** Why is Boris algorithm so good? *Physics of Plasmas*. 2013; 20(8):084503. DOI:10.1063/1.4818428. Available at: https://www.researchgate.net/publication/258081219_Why_is_Boris_algorithm_so_good.
5. **Umeda T.** A three-step Boris integrator for Lorentz force equation of charged particles. *Computer Physics Communications*. 2018; (228):1–4. DOI:10.1016/j.cpc.2018.03.019.
6. **Umeda T.** Multi-step Boris rotation schemes for Lorentz force equation of charged particles. *Computer Physics Communications*. 2019; (237):37–41. DOI:10.1016/j.cpc.2018.11.001.
7. **Zenitani S., Kato T.N.** Multiple Boris integrators for particle-in-cell simulation. *Computer Physics Communications*. 2019; (247):106954. DOI:10.1016/j.cpc.2019.106954.
8. **Zenitani S., Umeda T.** On the Boris solver in particle-in-cell simulation. *Physics of Plasmas*. 2018; 25(11):112110. DOI:10.1063/1.5051077.
9. **Qiang J.** High order numerical integrators for relativistic charged particle tracking. 2017; arXiv:1702.04486. DOI:10.48550/arXiv.1702.04486. Available at: <https://arxiv.org/abs/1702.04486v1>.
10. **Ripperda B., Bacchini F., Teunissen J., Xia C., Porth O., Sironi L., Lapenta G., Keppens R.** A comprehensive comparison of relativistic particle integrators. *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 2018; 235(21):20. DOI:10.3847/1538-4365/aab114. Available at: https://www.researchgate.net/publication/320619586_A_Comprehensive_Comparison_of_Relativistic_Particle_Integrators.
11. **Wolf E.M., Causley M., Christlieb A., Bettencourt M.** A particle-in-cell method for the simulation of plasmas based on an unconditionally stable field solver. *Journal of Computational Physics*. 2016; (326):342–372. DOI:10.1016/j.jcp.2016.08.006.
12. **Muñoz P.A., Jain N., Kilian P., Büchner J.** A new hybrid code (CHIEF) implementing the inertial electron fluid equation without approximation. *Computer Physics Communications*. 2018; (224):245–264. DOI:10.1016/j.cpc.2017.10.012.
13. **Derouillat J., Beck A., Pérez F., Vinci T., Chiaramello M., Grassi A., Flé M., Bouchard G., Plotnikov I., Aunai N., Dargent J., Riconda C., Grech M.** Smilei: a collaborative, open-source, multi-purpose particle-in-cell code for plasma simulation. *Computer Physics Communications*. 2018; (222):351–373. DOI:10.1016/j.cpc.2017.09.024.
14. **Jambunathan R., Levin D.A.** CHAOS: an octree-based PIC-DSMC code for modeling of electron kinetic properties in a plasma plume using MPI-CUDA parallelization. *Journal of Computational Physics*. 2018; (373):571–604. DOI:10.1016/j.jcp.2018.07.005.
15. **Berezin Yu.A., Dudnikova G.I., Liseykina T.V., Fedoruk M.P.** Modelirovanie nestatsionarnykh plazmennyykh protsessov [Modelling of non-stationary plasma processes]. *Novosibirsk: IPTs*; 2018: 482. (In Russ.)
16. **Boronina M.A., Dudnikova G.I., Efimova A.A., Genrikh E.A., Vshivkov V.A., Chernoshtanov I.S.** Numerical study of diamagnetic regime in open magnetic trap. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020; 1640(1):012021. DOI:10.1088/1742-6596/1640/1/01.
17. **Efimova A.A., Dudnikova G.I.** Hybrid models of ion-acoustic shock waves formation on collisionless plasma. *AIP Conference Proceedings*. 2019; (2164):100002. DOI:10.1063/1.5130839. Available at: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5130839>.
18. **Xu R., Spitkovsky A., Caprioli D.** Electron acceleration in non-relativistic quasi-perpendicular collisionless shocks. *The Astrophysical Journal Letters*. 2020; 897L(41). Available at: <https://arxiv.org/pdf/1908.07890v1.pdf>.
19. **Yu S.P., Kooyers G.P., Buneman O.** Time-dependent computer analysis of electron-wave interaction in crossed fields. *Journal of Applied Physics*. 1965; 36(8):2550–2559. DOI:10.1063/1.1714528.
20. **Buneman O.** Time-reversible difference procedures. *Journal of Computational Physics*. 1967; 1(4):517–535. DOI:10.1016/0021-9991(67)90056-3.
21. **Vay J.L.** Simulation of beams or plasmas crossing at relativistic velocity. *Physics of Plasmas*. 2008; 15(5):056701. DOI:10.1063/1.2837054.
22. **Higuera A., Cary J.** Structure-preserving second-order integration of relativistic charged particle trajectories in electromagnetic fields. *Physics of Plasmas*. 2017; 24(5):052104. DOI:10.1063/1.4979989.
23. **Voropaeva E., Vshivkov K., Vshivkova L., Dudnikova G., Efimova A.** New motion algorithm in the particle-in-cell method. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021; 2028(1):012011. DOI:10.1088/1742-6596/2028/1/012011.